Méthode du col pour la formule de Stirling On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{1}$$

Démonstration : On va exprimer la factorielle en fonction de la fonction Gamma d'Euler :

$$\begin{aligned} n! = \Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(t-n\ln(t))}dt \end{aligned}$$

On note $f_n(t) = t - n\ln(t)$. On peut remarquer que cette fonction admet un minimum en calculant sa dérivée.

$$f_n'(t) = 1 - \frac{n}{t} \tag{2}$$

On remarque que l'on a $f_n'(t) = 0 \Leftrightarrow t = n$. Ainsi, la fonction f admet un minimum en $t_n = n$.

On peut alors écrire le développement de Taylor de f au voisinage de t_n sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= f_n(t_n) + \underbrace{f_n'(t_n)}_{=0}(t-t_n) + \frac{1}{2}f_n''(t_n)(t-t_n)^2 + o((t-t_n)^2) \\ &= n - n\ln(n) + \frac{1}{2n}(t-n)^2 + o((t-n)^2) \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire :

$$n! \approx \int_0^{+\infty} e^{-(n-n\ln(n)+\frac{1}{2n}(t-n)^2)}dt = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-n)^2}{2n}}dt \tag{3}$$

En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{(t-n)}{\sqrt{2n}}$ et $du = \dfrac{dt}{\sqrt{2n}}$, on obtient :

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n}\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-u^2}du \tag{4}$$

De plus, pour n suffisamment grand, on a :

$$\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{+\infty} e^{-u^2} du \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} \tag{5}$$

Ainsi, on en déduit la formule de Stirling :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{6}$$