Invariance d'un réseau de Bravais par rotation : Le but de cet exercice est de montrer que les rotations laissant invariant le réseau de Bravais d'un cristal ont des angles θ dont les valeurs possibles sont 0, $\pm\pi/3$, $\pm\pi/2$, $\pm 2\pi/3$ et $\pm\pi$.

Démonstration : Commençons par rappeler la forme de la matrice R_θ associée à une rotation d'angle θ dans un repère orthonormé adapté de l'espace.

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{1}$$

On note que la trace de cette matrice est $Tr(R_\theta) = 2\cos(\theta) + 1$. Ce résultat est important car la trace est invariante par changement de base.
Considérons à présent une base $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3})$ adapté au réseau de Bravais du cristal et notons R'_θ la matrice de rotation précédente exprimée dans cette nouvelle base. Si le réseau est invariant par rotation d'angle θ, alors on a $R'_\theta.\overrightarrow{a_i} = \pm\overrightarrow{a_j}$, c'est-à-dire que la rotation entraîne une permutation des vecteur $\overrightarrow{a_i}$ au signe près. Ainsi, si l'on écrit R'_θ dans la base des vecteur $\overrightarrow{a_i}$, on obtient une matrice dont les coefficients sont entiers, égaux à ± 1, comme par exemple :

$$R'_{1,\theta} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad R'_{2,\theta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas, le résultat qui nous importe est que la trace de la matrice R'_θ est entière. Ainsi, on peut écrire la relation suivante :

$$2\cos(\theta) = n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

On obtient alors immédiatement les valeurs de θ possibles, $\cos(\theta)$ étant forcément entier ou demi-entier, à savoir 0, $\pm\pi/3$, $\pm\pi/2$, $\pm 2\pi/3$ ou $\pm\pi$.