
Mesures et filtres passifs

DORLAND Paul - THEODON Leo, Rapport de TP n° 1

Vendredi 30 novembre 2018

Le but de ce TP est d'étudier différents filtres, d'en mesurer les grandeurs caractéristiques et de les comparer avec les valeurs théoriques. Un filtre est un circuit permettant d'agir sur la forme (amplitude, phase, ...) d'un signal en fonction de la fréquence de ce dernier. Nous nous concentrerons ici sur l'étude de filtres passifs, qui ne contiennent donc que des éléments passifs (résistances, condensateurs, inductances), et aucun éléments actifs tels des amplificateurs opérationnels ou encore des transistors. Ainsi, il ne sera possible que d'atténuer le signal, et jamais de l'amplifier.

1 Définitions et rappels

Un filtre passif ne peut qu'atténuer certaines fréquences. On classe ces filtres selon les fréquences qui sont atténuées pour la tension de sortie :

- Les filtres **passé-bas** ne laissent passer que les **basses fréquences** jusqu'à un certain seuil,
- Les filtres **passé-haut** ne laissent passer que les **hautes fréquences** à partir d'un certain seuil,
- Les filtres **passé-bande** ne laissent passer que les fréquences situées dans un certain intervalle,
- Les filtres **réjecteur de bande** laissent passer toutes les fréquences à l'exception de celles situées dans un certain intervalle.

Si l'on considère un filtre symbolisé par un quadripôle Q (cf. figure 1) soumis à une tension v_e en entrée et v_s en sortie, alors on peut écrire :

$$\underline{H} = \frac{v_s}{v_e}, \quad (1)$$

où \underline{H} est la fonction transfert complexe du filtre. Selon le type de fréquence filtrée, cette fonction prendra par conséquent différentes valeurs.

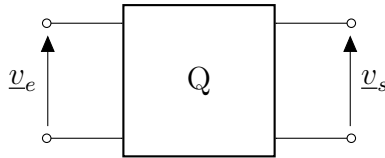


Figure 1 – Montage RC

On a représenté schématiquement le module de la fonction transfert $|\underline{H}|$ en fonction de la fréquence du signal d'entrée v_e sur la figure 2 pour les quatre types de filtres passifs évoqués ci-dessus.

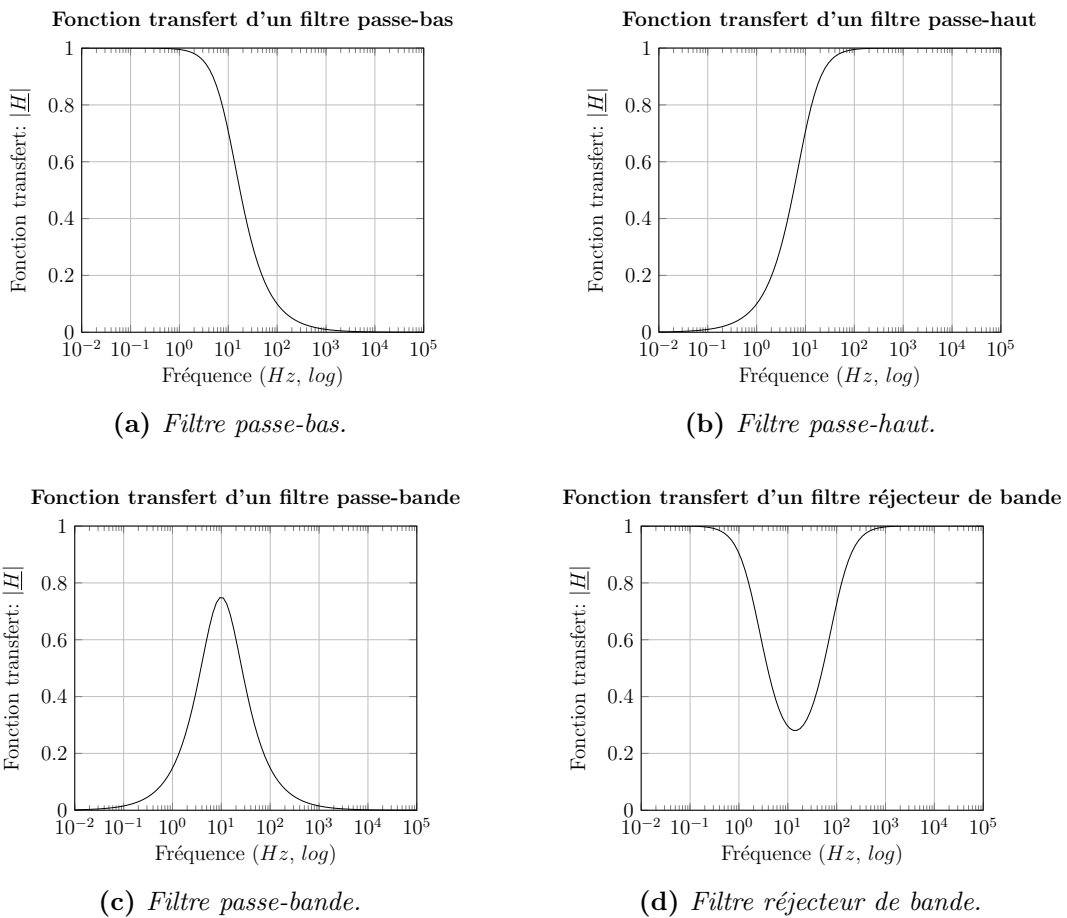


Figure 2 – Représentation schématique des modules des fonctions transfert de quatre filtres différents.

Dans la suite, nous utiliserons une représentation différente de la fonction transfert, à savoir les diagrammes de Bode. Ces derniers permettent de donner une information sur le module de la fonction transfert $|\underline{H}|$ de part le gain $G = 20\log(|\underline{H}|)$ en décibels (dB) et la phase, l'argument de \underline{H} , exprimé en radian. Ces deux grandeurs seront fonction de la fréquence f du signal d'entrée v_e . On rappelle à toute fin utile que $\omega = 2\pi f$ où ω est la pulsation du signal d'entrée v_e .

2 Filtres : Analyse théorique, montages et mesures

2.1 Circuit RC : filtre passe-bas

2.1.1 Analyse théorique

On considère le montage de la figure 3. Il s'agit d'un circuit RC qui va se révéler être un filtre passe-bas.

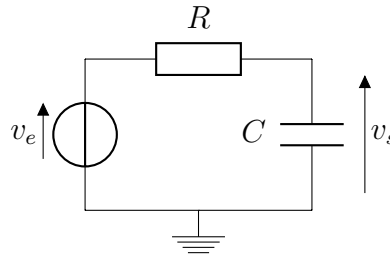


Figure 3 – Circuit RC

En effet, on rappelle que pour un signal périodique de pulsation ω , l'impédance du condensateur C est égale à $\frac{1}{jC\omega}$. Le montage étant un diviseur de tension, on peut écrire que la fonction de transfert \underline{H} est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{H}(w) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} = \frac{1}{1 + jRC\omega}. \quad (2)$$

On introduit la fréquence de coupure f_0 caractéristique du système qui est la fréquence d'atténuation à -3dB :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3)$$

On peut également étudier le comportement aux limites de la fonction transfert :

- Si $\omega \rightarrow +\infty$, alors $\underline{H} \rightarrow 0$ et donc $v_s \rightarrow 0$. Les hautes fréquences sont coupées.
- Si $\omega \rightarrow 0$, alors $\underline{H} \rightarrow 1$ et donc $v_s \rightarrow v_e$. Les basses fréquences sont très peu atténuées.

On en déduit immédiatement que le comportement de ce filtre est bien celui d'un filtre **passe-bas**. On peut effectuer le même raisonnement pour la phase. En effet, on a :

$$\underline{H}(w) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (4)$$

De l'équation (4), on déduit immédiatement l'expression de la phase $\varphi = \arg(\underline{H})$. En effet, on a :

$$\varphi(w) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right). \quad (5)$$

Grâce à l'équation (5), on peut effectuer l'analyse suivante :

- Si $\omega \rightarrow +\infty$, alors $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ et donc v_s a un retard de phase sur v_e de $\frac{\pi}{2}$.
- Si $\omega \rightarrow 0$, alors $\varphi \rightarrow 0$ et donc v_s et v_e sont en phase.

On peut alors résumer le comportement aux limites de ce filtre de la manière suivante :

	0	f_0	$+\infty$
$ \underline{H} $	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
φ	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

Table 1 – Comportement aux limites du circuit RC.

On notera que ces résultats pouvaient être prévu sans-même avoir à écrire la fonction transfert. En effet, on peut utiliser le comportement limite du condensateur aux très basses et très hautes fréquences. En effet, pour une fréquence faible, l'impédance du condensateur tend vers l'infini : il s'agit d'un circuit ouvert. En revanche, pour une fréquence très élevée, l'impédance tend vers 0 : le condensateur peut être assimilé à un court-circuit.

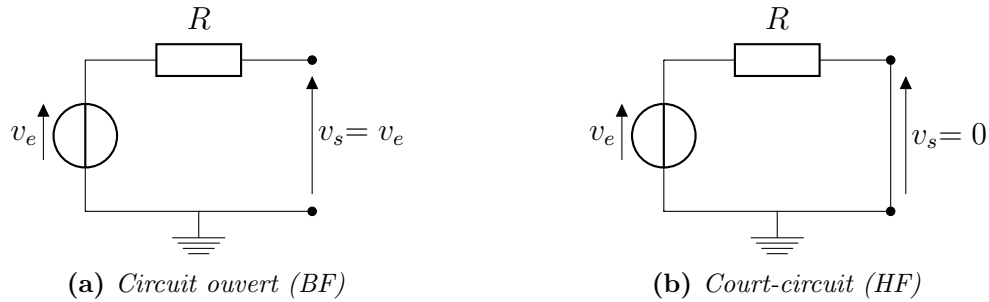


Figure 4 – Circuits RC équivalents pour les basses fréquences (4a) et les hautes fréquences (4b). Dans le cas (4a), on a $i = 0$ puisque le circuit est ouvert. Ainsi, l'intensité aux bornes de R est nulle, d'où $v_s = v_e$. Dans le cas (4b), la différence de potentiel en un même point (court-circuit) est nulle, d'où $v_s = 0$.

L'analyse des circuits équivalents de la figure 4 nous amène à la conclusion que le circuit RC ne laisse passer que les basses fréquences. Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.

Enfin, nous pouvons calculer le gain :

$$G_{dB}(w) = 20\log_{10}(|\underline{H}|) = -20\log_{10}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = -10\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right). \quad (6)$$

Encore une fois, on retrouve les conditions aux limites avec un gain qui tend vers 0 pour les basses fréquences et vers $-\infty$ pour les hautes fréquences. De plus, pour $f = f_0$, c'est-à-dire à la fréquence de coupure, on a :

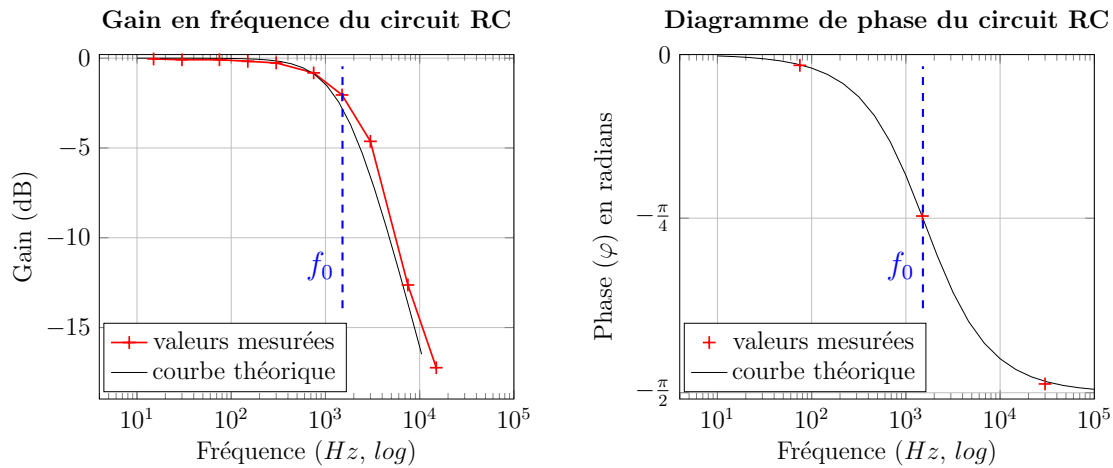
$$G_{dB}(\omega_0) = -10\log_{10}(2) = -3dB. \quad (7)$$

La fréquence de coupure f_0 est donc bien celle qui donne une atténuation de $-3dB$, comme annoncé lors de son introduction à l'équation (3).

2.1.2 Montage et mesures expérimentales

On va maintenant réaliser le montage du circuit RC de la figure 3 avec $R = 10k\Omega$ et $C = 10nF$. On alimente le circuit à l'aide d'un GBF qui fournit un signal sinusoïdal d'amplitude égale à 2V. On a donc $v_e = 2\sin(\omega t + \phi)$. On peut dès lors calculer la valeur de la fréquence de coupure :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \Omega \times 10^{-8} F} = 1592 Hz. \quad (8)$$



(a) Gain G_{dB} en fonction de la fréquence f . (b) Phase φ en fonction de la fréquence f .

Figure 5 – Comparaison des valeurs théoriques avec les valeurs mesurées pour la phase (5b) et pour le gain (5a) en fréquence du montage RC.

Les diagrammes de Bode en gain et en phase de la figure 5 sont obtenus en effectuant des mesures des tensions d'entrée v_e et de sortie v_s , ainsi que des mesures de phase, pour des fréquences allant de 7,5 Hz jusqu'à 300 kHz. En calculant le rapport $\frac{v_s}{v_e}$, on obtient la valeur de $|H|$, et on peut obtenir le gain. En particulier, pour $f = f_0$, on mesure un gain de $-2,43$ dB. Cela est quelque peu décevant puisque la valeur théorique est bien de -3 dB.

On peut constater que les valeurs mesurées pour la phase correspondent parfaitement à la théorie. Pour ce qui est du gain mesuré, l'allure de la courbe est très similaire à la courbe théorique. On notera que le gain diminue plus rapidement avec les valeurs théoriques. Cela peut être dû à plusieurs phénomènes. Premièrement, les composants ne sont pas parfaits. Il est également possible qu'il y ait une légère variation entre les caractéristiques théoriques des composants (résistance, capacité) et leur valeur réelle. De fait, les grandeurs caractéristiques du circuit, comme par exemple la fréquence de coupure f_0 peuvent être légèrement différentes. De plus, la capacité utilisée n'affiche pas une valeur de 10 nF mais de 9,8 nF. Cela implique que la fréquence de coupure réelle est légèrement supérieure à 1592 Hz. Enfin, l'erreur humaine est à prendre en compte, l'étudiant n'étant pas parfait lui non-plus.

2.2 Circuit CR : filtre passe-haut

2.2.1 Analyse théorique

On considère le montage de la figure 6. Il s'agit d'un circuit CR qui va se révéler être un filtre passe-haut.

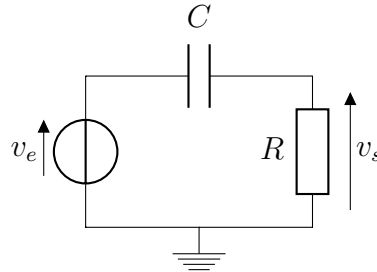


Figure 6 – Circuit CR

Le montage étant encore un diviseur de tension, on peut écrire que la fonction de transfert \underline{H} est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{H}(w) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{R}{1/jC\omega + R} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \quad (9)$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ la pulsation de coupure. Grâce à l'équation (10), nous pouvons obtenir l'expression du gain :

$$G_{dB}(w) = 20\log_{10}(|\underline{H}|) = 20\log_{10}\left(\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right). \quad (10)$$

En ce qui concerne la phase, on peut tout d'abord remarquer que :

$$\underline{H}(w) = \frac{j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} \times \frac{1 - j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (11)$$

A partir de l'équation (11), on obtient directement l'expression de la phase :

$$\varphi(w) = \arctan\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right). \quad (12)$$

On peut à nouveau étudier le comportement aux limites de la fonction transfert et de la phase :

- Si $\omega \rightarrow +\infty$, alors $\underline{H} \rightarrow 1$ et donc $v_s \rightarrow v_e$. Les hautes fréquences sont très peu atténuées. De plus, on a également $\varphi \rightarrow 0$ et donc v_s et v_e sont en phase.
- Si $\omega \rightarrow 0$, alors $\underline{H} \rightarrow 0$ et donc $v_s \rightarrow 0$. Les basses fréquences sont alors coupées. De plus, on a également $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ et donc v_s a une avance de phase sur v_e de $\frac{\pi}{2}$.

On en déduit cette fois que le comportement de ce filtre est celui d'un filtre **passé-haut**. On peut alors résumer son comportement aux limites de la manière suivante :

	0	f_0	$+\infty$
$ H $	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
φ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

Table 2 – Comportement aux limites du circuit CR.

De la même manière que pour le filtre passe-bas du circuit RC, ces résultats étaient prévisibles sans aucun calcul en analysant simplement le comportement du circuit dans les conditions limites. En se plaçant dans les très hautes ou très basses fréquences, on va à nouveau pouvoir considérer le condensateur comme un court-circuit ou comme un circuit ouvert, ce qui va nous indiquer le comportement de la fonction transfert aux limites.

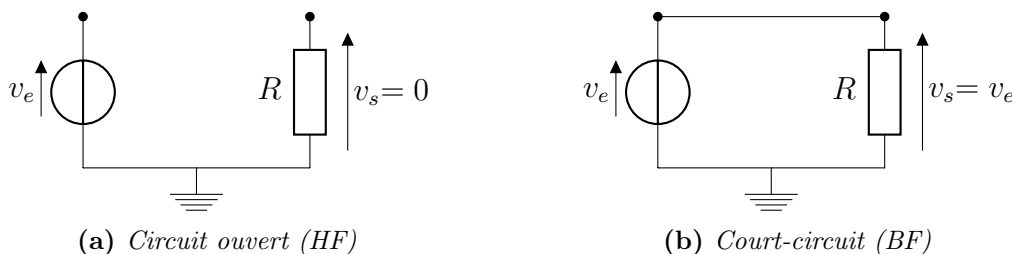


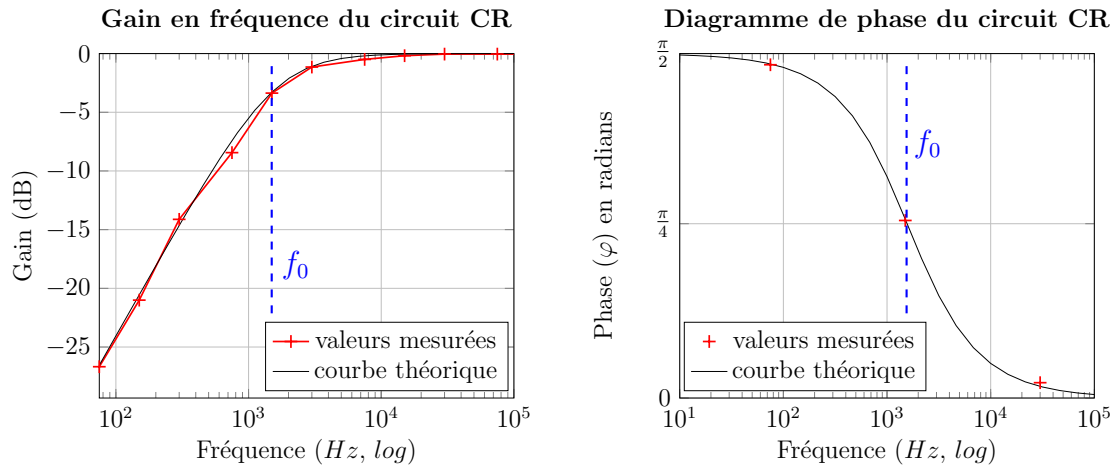
Figure 7 – Circuits CR équivalents pour les basses fréquences (4a) et les hautes fréquences (4b). Dans le cas (4a), on a $i = 0$ puisque le circuit est ouvert. Ainsi, l'intensité aux bornes de R est nulle, d'où $v_s = R.i = 0$. Dans le cas (4b), on a tout simplement $v_s = v_e$ en appliquant les lois de Kirchhoff, et en particulier la loi des mailles.

En analysant les circuits équivalents de la figure 7, on constate que le signal en sortie tend vers 0 pour les basses fréquences et vers v_e pour les hautes fréquences. C'est bien la définition même d'un filtre passe-haut.

2.2.2 Montage et mesures expérimentales

On va maintenant réaliser le montage du circuit CR de la figure 6 avec les mêmes composants que pour le circuit RC de la partie précédente, à savoir $R = 10k\Omega$ et $C = 10nF$. On alimente le circuit à l'aide du même GBF qui fournit toujours un signal sinusoïdal d'amplitude égale à 2V, et on a donc encore $v_e = 2\sin(\omega t + \phi)$. La valeur de la fréquence de coupure est la même que précédemment :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \Omega \times 10^{-8} F} = 1592 Hz. \quad (13)$$



(a) Gain G_{dB} en fonction de la fréquence f . (b) Phase φ en fonction de la fréquence f .

Figure 8 – Comparaison des valeurs théoriques avec les valeurs mesurées pour la phase (8b) et pour le gain (8a) en fréquence du montage CR.

Les diagrammes de Bode en gain et en phase de la figure 8 sont obtenus de la même manière que pour l'étude du diagramme RC, en effectuant des mesures des tensions d'entrée v_e et de sortie v_s , ainsi que des mesures de phase, pour des fréquences allant de 75Hz jusqu'à 75kHz. On peut noter que cette fois, pour $f = f_0$, on mesure un gain de $-3,1\text{dB}$. Cela est très satisfaisant, puisque l'on est très proche de la coupure à -3dB .

Si les valeurs de phase mesurées sont toujours très proches des valeurs calculées, on peut noter que les mesures de gain sont cette fois extrêmement proches des valeurs théoriques. Comme les valeurs mesurées du gain semble être cette fois légèrement plus faible que les valeurs théoriques, on peut supposer que c'est le fait d'effectuer le montage et les mesures avec un condensateur de capacité plus importante que celle supposée, notamment lors des calculs, qui est la meilleure explication à l'écart (faible) des valeurs expérimentales avec les valeurs théoriques.

3 Effet des filtres sur un signal rectangulaire

3.1 Réponse à un échelon de tension

Nous allons reprendre l'étude des circuits RC et CR des figures 3 et 6 en appliquant entrée un signal rectangulaire de fréquence 100Hz variant entre 0V et 3V. La tension $v_e(t)$ est donc une fonction du temps.

3.1.1 Étude théorique

Le montage étudié est celui de la figure 9. Il suffira de considérer la tension aux bornes de la résistance ou du condensateur selon que l'on souhaite étudier le filtre passe-haut ou passe-bas. Rappelons tout d'abord l'expression du courant dans un circuit contenant un condensateur en régime transitoire en fonction du temps t .

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (14)$$

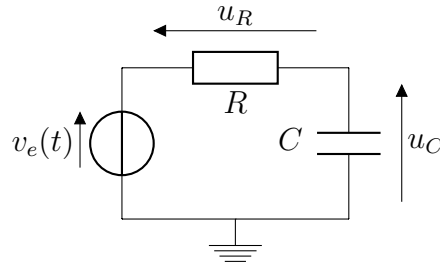


Figure 9 – Circuit RC

De plus, la loi des mailles nous permet d'écrire l'équation suivante en utilisant l'équation (14) :

$$v_e(t) = u_C(t) + R.i = u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} \quad (15)$$

On peut résoudre l'équation différentielle du premier ordre (15) en posant $\tau = RC$ et $E = 3V$:

$$u_C(t) = \begin{cases} Ee^{-t/\tau}, & \text{si } v_e(t) = 0. \\ E(1 - e^{-t/\tau}), & \text{si } v_e(t) = E = 3V. \end{cases} \quad (16)$$

En combinant les équations (15) et (16), on peut aussi obtenir l'expression de $u_R(t) = v_e(t) - u_C(t)$, l'intensité aux bornes de R :

$$u_R(t) = \begin{cases} -Ee^{-t/\tau}, & \text{si } v_e(t) = 0. \\ Ee^{-t/\tau}, & \text{si } v_e(t) = E = 3V. \end{cases} \quad (17)$$

On va chercher à calculer ce que l'on appelle le temps de montée ou temps de descente. On pourra l'obtenir en effectuant des mesures à l'oscilloscope, notamment en repérant le temps de passage du seuil de 10% de l'amplitude maximale du signal au seuil de 90%. On cherchera donc les valeurs de t telles que $u_C(t) = 0,1E$ et $u_C(t) = 0,9E$. Le montage étant effectué avec une résistance $R = 10k\Omega$ et un condensateur $C = 10nF$, on a donc $\tau = 100\mu s$.

On cherche ainsi à résoudre les équations suivantes :

$$\begin{cases} u_C(t_1) = Ee^{-t_1/\tau} = 0,1E, \\ u_C(t_2) = Ee^{-t_2/\tau} = 0,9E. \end{cases} \quad (18)$$

On en déduit immédiatement que $t_1 = 230\mu s$ et que $t_2 = 10\mu s$, soit $\Delta(t) = t_1 - t_2 = 220\mu s$. Le temps de montée (et temps de descente) est donc $\Delta(t) = 220\mu s$.

Nous allons à présent chercher à retrouver cette valeur en effectuant des mesures directement sur le montage.

3.1.2 Montage et mesures

On réalise à présent le montage 9 à l'aide des valeurs de R et de C indiquées ci-avant afin de tenter de mesurer le temps de montée que nous venons de calculer. Pour ce faire, nous pourrions utiliser les fonctions prédéfinies de l'oscilloscope ou bien

utiliser des curseurs et effectuer le calcul nous-même. Par soucis de précision, nous mettrons en œuvre les deux méthodes.

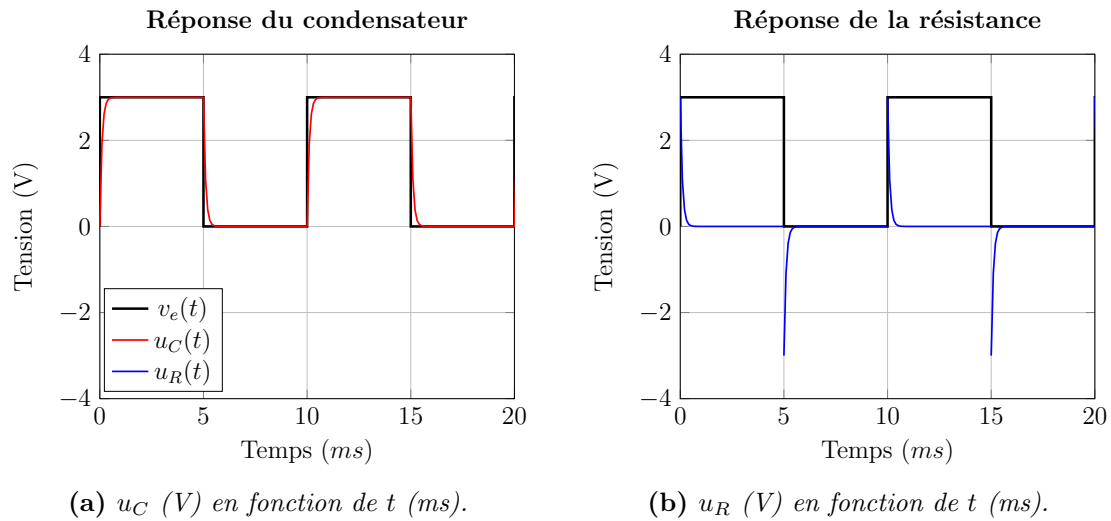


Figure 10 – Réponse du circuit 3 (resp. 6) en (10a) (resp. 10b) pour $u_C(t)$ (resp. $u_R(t)$) à un échelon de tension $u_e(t)$, signal carré de fréquence 100Hz et d'amplitude 3V.

Après avoir affiché les courbes de la figure 10 sur l'oscilloscope, nous pouvons mesurer le temps de montée (respectivement de descente) $\Delta(t)$, et l'on trouve :

$$\Delta(t) = 207 \pm 10\mu s. \quad (19)$$

L'incertitude est calculée à partir de l'écart maximal entre les temps de montée et de descente obtenus avec les deux méthodes expérimentales différentes (mesure manuelle ou automatique). On constate que cette valeur est très proche (moins de 10% d'écart au maximum) de la valeur théorique $\Delta(t)_{theorique} = 220\mu s$.

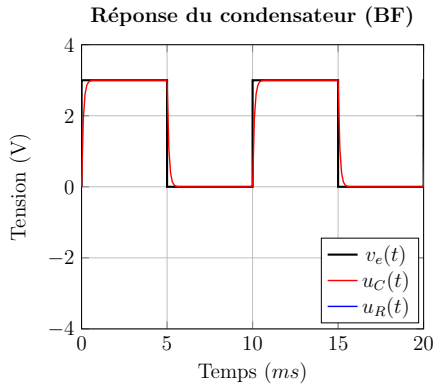
Enfin, on peut constater que si l'on fait varier l'amplitude du signal tout en conservant la même valeur moyenne, alors le temps de montée calculé restait inchangé. L'amplitude du signal n'a donc pas d'influence sur la réponse du circuit à un échelon de tension.

3.2 Réponse à un signal rectangulaire

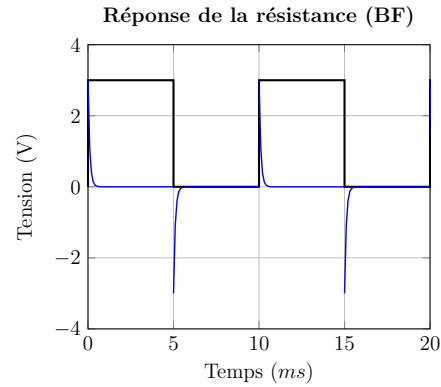
Nous poursuivons notre étude des circuits RC et CR des figures 3 et 6 en appliquant encore une fois en entrée un signal rectangulaire variant entre 0V et 3V et dont la période vaudra soit $\frac{\tau}{100}$, soit 100τ . En d'autres termes, la fréquence du signal sera soit de 100Hz, soit de 1MHz.

La figure 11 indique les résultats obtenus dans les quatre cas différents (circuit RC ou CR et hautes ou basses fréquences). On peut ranger les signaux obtenus dans les classes suivantes :

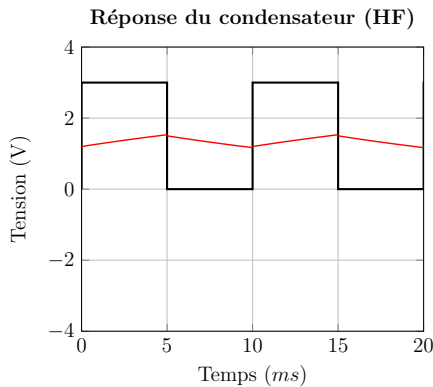
1. **Front du signal** : $u_s(t) \approx \frac{dv_e}{dt}(t)$, cas de la réponse (11b) : circuit CR et basses fréquences.



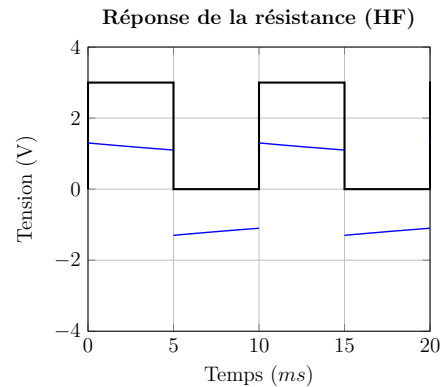
(a) u_C pour un circuit RC (BF).



(b) u_R pour un circuit CR (BF).



(c) u_C pour un circuit RC (HF).



(d) u_R pour un circuit CR (HF).

Figure 11 – Réponse des circuits 3 (resp. 6) en (11a) (resp. (11b)) pour $u_C(t)$ (resp. $u_R(t)$) à un échelon de tension $u_e(t)$, signal carré de fréquence 100Hz et d'amplitude 3V et réponse en (11c) (resp. (11d)) pour $u_C(t)$ (resp. $u_R(t)$) à un échelon de tension $u_e(t)$, signal carré de fréquence 100MHz et d'amplitude 3V.

2. **Signal transmis sans déformation** : $u_s(t) \approx v_e(t)$, cas de la réponse (11a) : circuit RC et basses fréquences.
3. **Valeur moyenne du signal** : $u_s(t) \approx \langle v_e(t) \rangle$, cas de la réponse (11c) : circuit RC et hautes fréquences.
4. **Signal transmis sans valeur moyenne** : $u_s(t) \approx v_e(t) - \langle v_e(t) \rangle$, cas de la réponse (11c) : circuit CR et hautes fréquences.

L'obtention de tels signaux est rendue possible par les effets capacitifs introduits par la présence du condensateur. Le temps de charge et de décharge de ce dernier étant directement lié à la constante τ calculée précédemment, on peut jouer sur la latence qu'elle induit sur l'amplitude du courant et modifiant la fréquence du signal d'entrée. C'est ainsi que l'on peut obtenir un circuit dérivateur (cf. (11b)) ou encore, par exemple, un signal continu (valeur moyenne, cf. (11c)) à partir d'une source alternative. La valeur de la résistance a bien entendu elle aussi une influence directe sur la valeur de τ .

3.3 Conception

On s'intéresse à présent à la meilleure façon d'obtenir de tels signaux en sortie en fonction des degrés de liberté dont nous disposons pour un signal d'entrée en créneaux variant de 0V à 4V. On cherche à faire en sorte que la gamme de fréquences utilisable soit la plus large possible.

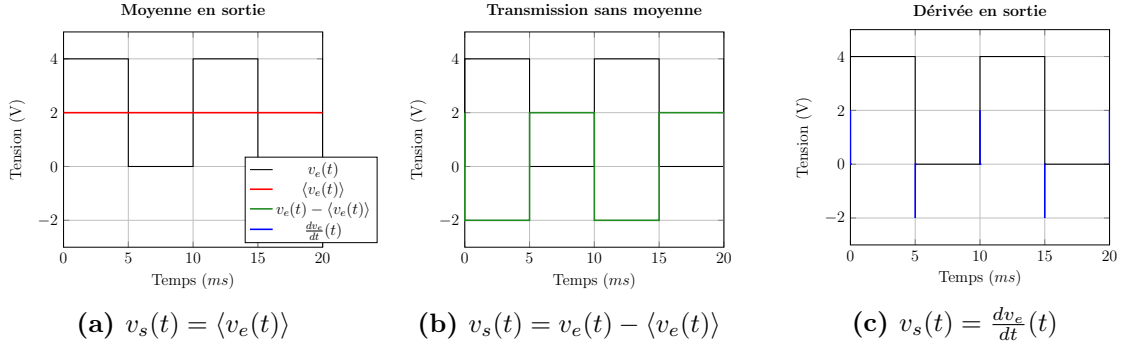


Figure 12 – Moyenne en sortie (12a), transmission sans moyenne (12b) et dérivée (12c) d'un signal rectangulaire de 4V d'amplitude.

Nous disposons, pour tenter d'obtenir ces signaux, de plusieurs résistances (100 Ω , 10k Ω ou encore 47k Ω) et condensateurs (10nF, 100nF et 1 μ F). Les signaux proposés par la figure 12, même s'ils sont idéaux, peuvent malgré tout être approchés par les circuits suivants :

1. Le signal (12a) avec moyenne en sortie ($v_s(t) = \langle v_e(t) \rangle$) est obtenu par un circuit RC en haute fréquence (cf. figure (11c)). On prend donc la tension aux bornes du condensateur en sortie, tout en minimisant la fréquence de coupure f_0 . On choisit donc $R = 47\text{k}\Omega$ et $C = 1\mu\text{F}$ afin que f_0 soit la plus petite possible et que le circuit fonctionne dans ce régime pour une gamme de fréquences plus large. Pour augmenter encore la résistance et diminuer ainsi un peu plus f_0 , on pourra également utiliser les trois résistances placées en série ($R_{eq} = 57,1\text{k}\Omega$). Le même raisonnement peut être appliqué pour les condensateurs placés en parallèle afin de maximiser leur capacité. On aura cette fois $C_{eq} = 1,11\mu\text{F}$. Avec ces valeurs, on trouve $f_0 = 2,5\text{Hz}$.
2. Le signal (12b), transmis sans moyenne ($v_s(t) = v_e(t) - \langle v_e(t) \rangle$), est obtenu par un circuit CR en haute fréquence (cf. figure (11d)). On prend donc la tension aux bornes du condensateur en sortie, tout en minimisant à nouveau f_0 . On va donc placer les résistances en série et les condensateurs en parallèle afin de maximiser la résistance et la capacité du circuit, et de minimiser la fréquence de coupure. On a toujours $R_{eq} = 57,1\text{k}\Omega$ et $C_{eq} = 1,11\mu\text{F}$, et on aura donc encore une fois une fréquence de coupure $f_0 = 2,5\text{Hz}$.
3. Enfin, le signal (12c) avec dérivée en sortie ($v_s(t) = \frac{dv_e(t)}{dt}$) est obtenu par un circuit CR en basse fréquence (cf. figure (11b)). On prend donc la tension aux bornes de la résistance en sortie, tout en maximisant la fréquence de coupure f_0 . Pour diminuer la résistance et augmenter ainsi f_0 , on utilisera les trois résistances placées en parallèle ($R_{eq} = 98,98\Omega$). De même, on placera les condensateurs en série afin de minimiser leur capacité. On aura cette fois $C_{eq} = 9\text{nF}$. Avec ces valeurs, on trouve $f_0 \approx 179\text{kHz}$.

4 Filtres du second ordre

Dans les parties précédentes, nous nous sommes restreints à l'étude de deux filtres, à savoir les filtres RC et CR, qui sont des filtres du premier ordre. Nous allons maintenant nous intéresser à deux filtres d'ordre supérieur : le filtre en T ponté et le filtre en double L.

4.1 Filtre en double L

On s'intéresse au montage de la figure 13.

4.1.1 Étude préliminaire

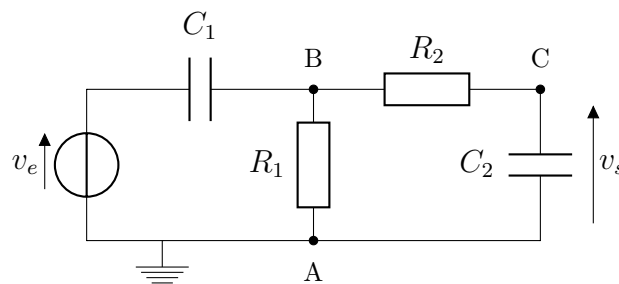


Figure 13 – Filtre en double L

On remarque immédiatement qu'il s'agit en réalité de deux filtres, l'un CR et l'autre RC, placés en série. Le premier filtre est un passe haut qui va filtrer les basses fréquences. Seules les basses fréquences seront reproduites en sortie u_{AB} . Or, u_{AB} est aussi le signal d'entrée du second circuit qui, lui, est un filtre passe-bas. Les hautes fréquences seront donc à leur tour filtrées.

On obtient donc un signal de sortie v_s pour lequel les fréquences situées hors d'un certain intervalle sont atténuées. Il s'agit donc d'un **filtre passe-bande**, puisque seules les fréquences situées dans un intervalle particulier sont conservées.

4.1.2 Schéma équivalent aux limites

Pour avoir une meilleure idée de ce qu'il se passe, il convient d'étudier les conditions aux limites.

La figure 14 indique le comportement du circuit à très hautes et très basses fréquences. On constate que dans les deux cas, la réponse en sortie est nulle : $v_s = 0$. On peut en conclure que le filtre coupe les hautes et les basses fréquences et que seules les fréquences intermédiaires situées dans un intervalle déterminé peuvent passer. C'est bien la définition d'un **filtre passe-bande**.

Enfin, on pourra tenter de calculer la fonction transfert de ce circuit afin d'étayer nos hypothèses.

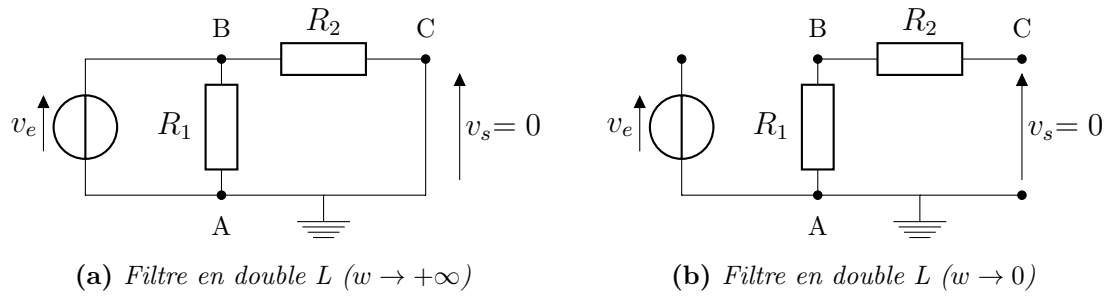


Figure 14 – Pour $w \rightarrow +\infty$ (14a), les condensateurs sont remplacés par des courts-circuits. On a donc immédiatement $v_s = 0$. Pour $w \rightarrow 0$ (14b), on remplace les condensateurs par des circuits ouverts. On a donc $v_s = v_{CA}$, c'est-à-dire la tension aux bornes des résistances en série. Or, le circuit est ouvert, donc $i = 0$. On en conclut encore une fois que $v_s = 0$.

4.1.3 Fonction transfert

On peut remarquer que le circuit en double L de la figure 13 est en réalité un double diviseur de tension. On peut commencer par calculer l'impédance équivalente Z_{eq} entre A et B pour la partir droite du circuit.

$$Z_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}}} \quad (20)$$

On peut alors écrire plus simplement l'expression de la fonction transfert complexe :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_{eq}}{\frac{1}{jC_1\omega} + Z_{eq}} \times \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}, \quad (21)$$

et après simplification, en posant $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$, et en combinant les équation (20) et (21), on obtient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1 + j\omega/\omega_2 + j\omega R_1C_2 + j^2\omega^2/(\omega_1\omega_2)}. \quad (22)$$

En continuant les calculs, on pourrait faire apparaître une fréquence particulière $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1C_1R_2C_2}} = \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{2\pi}$ pour laquelle le gain du système est maximal. Néanmoins, nous allons nous borner à l'étude du comportement aux limites. On peut alors constater que :

- si $\omega \rightarrow 0$, alors $\underline{H} \rightarrow 0$,
- si $\omega \rightarrow +\infty$, alors $\underline{H} \rightarrow 0$,
- si $\omega = \sqrt{\omega_1\omega_2}$, alors $\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{R_1}{R_2}}$,

et ainsi conclure que ce filtre atténue bien les basses et les hautes fréquences. On notera également que pour le cas particulier où $R_1 = R_2$ et $C_1 = C_2$, pour $f = f_0$, alors le gain maximal est égal à $20\log(|\underline{H}(\omega_0)|) = 20\log(1/3) = -9,5\text{dB}$.

4.2 Filtre en T ponté

4.2.1 Étude préliminaire

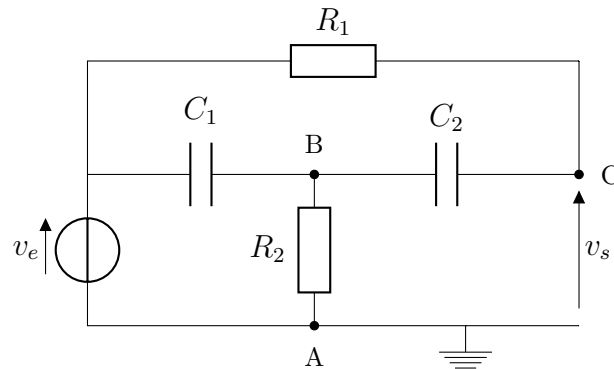


Figure 15 – Filtre en T ponté

On remarque que ce circuit (figure 15) peut être vu comme deux circuits CR et RC en parallèle. On peut voir que la tension en sortie v_s peut s'écrire comme somme de deux tensions v_{BA} et v_{CB} . De manière très générale, si l'on fonctionne en haute fréquence, on devrait avoir $v_{BA} = v_e$. Inversement, si l'on est en basse fréquence, la tension v_e se retrouve aux bornes du condensateur C_1 et par extension aux bornes de C_2 puisque la partie supérieure du circuit s'apparente à un passe-bas. Ainsi, on aurait $v_{BA} = v_e$. En conclusion, on aurait $v_s \approx v_e$ tant pour les hautes que les basses fréquences, ce qui constitue l'une des caractéristiques d'un **filtre réjecteur de bande**. L'étude de schémas équivalents dans les conditions limite nous permettra de confirmer ces hypothèses.

4.2.2 Schéma équivalent aux limites

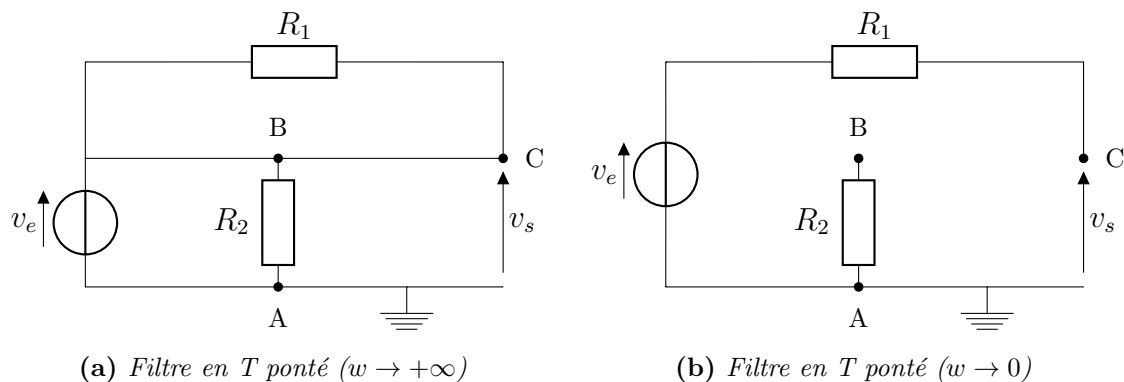


Figure 16 – Pour $w \rightarrow +\infty$ (16a), les condensateurs sont remplacés par des court-circuits. On a donc immédiatement $v_s = v_{BA} = v_e$. Le résistance R_1 est by-passée. Pour $w \rightarrow 0$ (16b), on remplace les condensateurs par des circuits ouverts. On a donc $v_s + v_{R_1} = v_e$. Or, le circuit est ouvert, donc $i = 0$. Le courant traversant R_1 étant nul, on a donc $u_{R_1} = R_1 \cdot i = 0$ et on en conclut encore une fois que $v_s = v_e$.

Comme d'habitude, seul un calcul théorique de la fonction de transfert pourrait nous permettre de confirmer nos prédictions avec certitude. Néanmoins, ce calcul s'avérant bien plus ardu que pour le filtre en double L, nous ferons confiance à l'étude des conditions limite et aux mesures expérimentales effectuées qui semblent confirmer nos hypothèses.

Conclusion

Lors de ce TP, nous avons eu un bref aperçu de la puissance des filtres passifs. Les exemples d'application sont nombreux et variés.

Ils peuvent être utilisés comme protection aux signaux de trop hautes fréquences car en effet, les circuits électroniques sont très sensibles aux fréquences élevées.

Ils peuvent également être utilisés afin de sélectionner certaines gammes de fréquences afin de récupérer une information codée sur une seule composante spectrale du signal. Ainsi, un même signal permet de transporter plusieurs informations encodées dans des gammes de fréquences différentes.

On peut aussi penser à du redressement de signal, en prenant la valeur moyenne ce qui permet d'obtenir par exemple un signal continu en sortie, ou encore d'effectuer certaines opérations parfois complexes numériquement comme l'intégration, de manière purement analogique.

Il est aussi possible de modifier la phase du signal sans pour autant en modifier l'amplitude. En recombinaison des signaux déphasés, on peut ainsi construire des circuits permettant de réduire le bruit grâce à un inverseur de phase.

Toujours en vue d'améliorer la qualité d'un signal, un filtre réjecteur de bande peut permettre d'atténuer certaines fréquences parasites indésirables.

En traitement du signal, et particulièrement dans le domaine musical, le fait de pouvoir jouer sur les fréquences, notamment à l'aide d'égaliseurs paramétriques analogiques constituées notamment de filtres passe-bande, passe-haut, passe-bas et réjecteur de bande permet de contrôler de manière très précise le son d'un instrument.

Ce ne sont que quelques exemples, les filtres, tant actifs que passifs, étant présents massivement au sein de tous les appareils électroniques que nous utilisons quotidiennement. Le fait de traiter le signal de manière analogique plutôt que numérique est aussi recherché dans certains domaines, notamment musical, encore une fois, puisque le digital requiert une discrétisation de l'information, et donc des pertes.